

Paarerzeugung durch langsame geladene Teilchen im Coulombschen Feld

Von E. HARA

Aus der Kernphysikalischen Abteilung des Max-Planck-Instituts für Chemie (Otto-Hahn-Institut)
Mainz

(Z. Naturforsch. **16 a**, 155—161 [1961]; eingegangen am 28. September 1960)

The pair creation cross section for heavy particles in the COULOMB field is calculated using SCHRODINGER—COULOMB wave functions for the heavy incident particles and plane waves for the created pair. It is shown that the order of magnitude of the cross section thus obtained is given by the product of the value deduced by HEITLER and NORDHEIM¹ with BORN approximation, and the SOMMERFELD correction factor, which is known for the emission of Bremsstrahlung. The total cross section is computed for proton energies of $8 m c^2$, $12 m c^2$ and $16 m c^2$. It turns out to be smaller than the result of HEITLER and NORDHEIM by several orders of magnitude.

Die Paarerzeugung durch geladene Teilchen im COULOMBSchen Feld wurde schon von mehreren Theoretikern nach der BORNschen Näherung berechnet^{1—3}. Die Größenordnung der experimentellen Ergebnisse stimmt, wenn das einfallende Teilchen ein Elektron ist, mit diesen theoretischen Werten überein⁴. Dagegen zeigen sich bei der Paarerzeugung durch Protonen große Abweichungen zwischen Theorie und Experiment. STEPHENS und STAUB⁵ fanden, daß der Wirkungsquerschnitt für die Paarerzeugung durch 1,5 MeV-Protonen an Tantal mindestens um einen Faktor 6 kleiner als derjenige ist, den HEITLER und NORDHEIM¹ nach der BORNschen Näherung berechnet hatten.

Die Gültigkeit der BORNschen Näherung wurde von WILLIAMS⁶ ausführlich diskutiert. Er zeigte, daß die klassische Mechanik eine gute Näherung ist, wenn der Faktor $\eta = Z_1 Z_2 \alpha / \beta$ sehr groß ist, wobei Z_1 und Z_2 die Ordnungszahlen des einfallenden Teilchens und des Streuzentrums, α die SOMMERFELDSche Feinstrukturkonstante und β die Geschwindigkeit des einfallenden Teilchens in Einheiten der Lichtgeschwindigkeit sind. Bei sehr geringer kinetischer Energie des einfallenden schweren Teilchens und bei schweren Atomkernen muß deshalb der Wirkungsquerschnitt der Paarerzeugung in den klassischen Grenzwert übergehen, d. h. verschwinden, während die BORNsche Näherung ziemlich große Werte gibt. Der große Fehler der BORNschen Näherung, den STEPHENS und STAUB bemerkten, stammt nicht nur

aus der großen Masse und damit geringen Geschwindigkeit des Protons, sondern auch aus seiner positiven Ladung. Der entsprechende Unterschied zwischen der durch Protonen und durch Elektronen erzeugten Bremsstrahlung wurde von SOMMERFELD⁷ ausführlich diskutiert. Ein einfallendes schweres positiv geladenes Teilchen muß in diesem Fall durch COULOMBSche Wellenfunktionen beschrieben werden, da auch für die Bremsstrahlung die BORNsche Näherung nicht einmal die richtige Größenordnung der Wirkungsquerschnitte ergibt.

Die Paarerzeugung durch Protonen am schweren Atomkern ist direkt oberhalb der Schwelle unmeßbar klein. Das Ziel dieser Arbeit ist es, zu prüfen, ob man für eine etwas höhere Energie diesen Prozeß beobachten kann. Zu diesem Zweck wird der Einfachheit halber angenommen, daß die erzeugten Elektronen und Positronen durch ebene Wellen repräsentiert werden können, und daß die niedrigste BORNsche Näherung die richtige Größenordnung gibt. Nach JAEGER und HULME⁸ ist nämlich der Fehler dieser Näherung bei der Paarerzeugung durch Quanten etwa ein Faktor 2. Der durch die anderen Näherungen verursachte Fehler ist in dieser Arbeit noch kleiner als ein Faktor 2.

Im folgenden wird der totale Wirkungsquerschnitt für die Paarerzeugung durch Protonen an Tantal ($Z_2 = 73$) numerisch ausgerechnet, wobei die kinetische Energie der Protonen zu $8 m c^2$, $12 m c^2$ und

¹ W. HEITLER u. L. NORDHEIM, J. Phys. Radium **5**, 449 [1934].
² H. J. BHABHA, Proc. Roy. Soc., Lond. A **152**, 559 [1935]; Proc. Camb. Phil. Soc. **31**, 394 [1935].

³ T. MUROTA, A. UEDA u. H. TANAKA, Prog. Theor. Phys. **16**, 482 [1956].

⁴ L. CRIEGEE, Z. Phys. **158**, 433 [1960]. — P. K. ADITYA, Nuovo Cim. **11**, 546 [1959]. — G. LÜTTJENS, Z. Naturforschg. **13 a**, 510 [1958]; und viele frühere Arbeiten.

⁵ W. E. STEPHENS u. H. STAUB, Phys. Rev. **109**, 1196 [1958]; Helv. Phys. Acta **30**, 261 [1957].

⁶ E. J. WILLIAMS, Rev. Mod. Phys. **17**, 217 [1945].

⁷ A. SOMMERFELD, Atombau und Spektrallinien, 2. Auflage, II. Band, Verlag Vieweg, Braunschweig 1951, S. 564.

⁸ J. C. JAEGER u. H. R. HULME, Proc. Roy. Soc., Lond. **153**, 443 [1936].



$16 m c^2$ (m = Ruhmasse des Elektrons, c = Lichtgeschwindigkeit) angenommen wird.

Ableitung des totalen Wirkungsquerschnitts

In dieser Arbeit sind \hbar und c gleich 1 gesetzt.

Für die elektromagnetischen Einheiten wird das rationale System angenommen:

$$e^2 = 4 \pi \alpha .$$

Das Skalarprodukt von Vierervektoren ist

$$a_\mu b^\mu = a \cdot b - a_0 b_0 ,$$

wobei a und b räumliche Komponenten und a_0 und b_0 zeitliche Komponenten sind.

Es bedeutet:

$$\tilde{p} = \gamma_\mu p^\mu .$$

Die Paarerzeugung durch geladene Teilchen an unendlich schweren Atomkernen wird durch die folgenden vier Diagramme beschrieben:

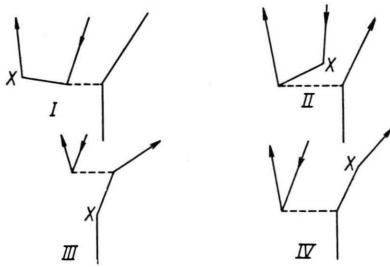


Abb. 1.

In diesen Diagrammen bezeichnet das Kreuz das COULOMBSche Feld. Wenn die Quanten im Zwischenzustand fast reell sind, finden die Prozesse I und II

$$M^I = \frac{Z_1 Z_2 e^4}{(2 \pi)^8} \frac{m}{\sqrt{\varepsilon_+ \varepsilon_-}} \frac{M_1}{\sqrt{E_A E_E}} \int d^3 \mathbf{f} \bar{u}(p_-) \frac{\tilde{n}}{|\mathbf{f} - \mathbf{p}_- - \mathbf{p}_+|^2} \cdot \frac{i(\tilde{k} - \tilde{p}_+) - m}{(k - p_+)^2 + m^2} \gamma_\mu v(p_+) \frac{1}{|\mathbf{f}|^2 - (\Delta E)^2} \bar{u}(k_E) \gamma^\mu u(k_A) I , \quad (1)$$

$$M^{II} = \frac{Z_1 Z_2 e^4}{(2 \pi)^8} \frac{m}{\sqrt{\varepsilon_+ \varepsilon_-}} \frac{M_1}{\sqrt{E_A E_E}} \int d^3 \mathbf{f} \bar{u}(p_-) \gamma_\mu \frac{i(\tilde{p}_- - \tilde{k}) - m}{(p_- - k)^2 + m^2} \cdot \frac{\tilde{n}}{|\mathbf{f} - \mathbf{p}_- - \mathbf{p}_+|^2} v(p_+) \frac{1}{|\mathbf{f}|^2 - (\Delta E)^2} \bar{u}(k_E) \gamma^\mu u(k_A) I , \quad (2)$$

$$M^{III} = -i \frac{Z_1 e^2}{(2 \pi)^5} \frac{m}{\sqrt{\varepsilon_+ \varepsilon_-}} \frac{M_1}{\sqrt{E_A E_E}} \int d^3 \mathbf{f} \delta(\mathbf{f} - \mathbf{p}_+ - \mathbf{p}_-) \bar{u}(p_-) \gamma_\mu v(p_+) \frac{1}{|\mathbf{f}|^2 - (\Delta E)^2} \bar{u}(k_E) \gamma^\mu u(k_A) I , \quad (3)$$

$$I = \exp\left\{-\frac{1}{2} \pi(\eta_A + \eta_E)\right\} |\Gamma(1 + i \eta_A)| |\Gamma(1 + i \eta_E)| \int d^3 r \exp\{i(\mathbf{f}_A - \mathbf{f}_E - \mathbf{f})\} \cdot {}_1 F_1[-i \eta_E, 1; i(|\mathbf{f}_E| r + \mathbf{f}_E \cdot \mathbf{r})] {}_1 F_1[-i \eta_A, 1; i(|\mathbf{f}_A| r - \mathbf{f}_A \cdot \mathbf{r})] , \quad (4)$$

statt. Wenn dagegen der Impuls der emittierten Quanten sehr weit von der Kugelschale vom Radius der Energie entfernt liegt, können sich diese Quanten spontan vernichten. Dies entspricht den Diagrammen III und IV. Verwendet man für das einfallende und weggehende schwere Teilchen statt ebener Wellen COULOMBSche Wellenfunktionen, so ist der Unterschied zwischen diesen verschiedenen Prozessen nicht mehr so klar wie in der BORNschen Näherung. Erstens gehen dann die Matrixelemente, die den Diagrammen III und IV entsprechen, beide in das gleiche Matrixelement über. Zweitens kann in der BORNschen Näherung das erzeugte Positron oder Elektron im Zwischenzustand nie reell sein, d. h. sein Impulsvektor liegt nie auf der Massenschale. Wenn dagegen das einfallende Teilchen durch eine COULOMBSche Wellenfunktion beschrieben wird, kann das emittierte Quant einen beliebigen Impuls haben und daher das erzeugte Teilchen auch schon im Zwischenzustand reell sein. In diesem Fall bedeuten die Diagramme I und II einfach, daß das Elektron oder Positron nach seiner Erzeugung im COULOMBSchen Feld einmal gestreut wird. Dieser Prozeß wird entweder durch ein Residuum der Matrixelemente I und II oder durch das Produkt des Matrixelements für die Paarerzeugung und desjenigen für die MOTTsche Streuung beschrieben. Er gehört daher zu einer höheren Näherung und wird deshalb nach den Voraussetzungen dieser Rechnung (s. o.) vernachlässigt.

Nehmen wir als Wellenfunktion für das einfallende und weggehende schwere Teilchen das Produkt aus den DIRACschen Spinoren und der SCHRÖDINGERschen COULOMBSchen Wellenfunktion, so können wir die Matrixelemente im Impulsraum folgendermaßen ausdrücken:

wobei

- $\varepsilon_+, \varepsilon_-$: Gesamtenergie des Positrons bzw. des Elektrons,
 E_A, E_E : Gesamtenergie des einfallenden Teilchens bzw. des weggehenden schweren Teilchens,
 M_1 : Ruhmasse des einfallenden Teilchens,
 ΔE $= E_A - E_E$,
 p_+, p_- : Viererimpuls des Positrons bzw. des Elektrons,
 k_A, k_E : Viererimpuls des einfallenden Teilchens bzw. des weggehenden schweren Teilchens,
 $u(p_-), v(p_+)$: DIRACscher Spinor für das Elektron bzw. für das Positron,
 \mathbf{f} : Dreierimpuls des emittierten Photons,
 k_0 $= \Delta E$,
 n : Zeitlicher Einheitsvektor.

Die Ausbreitungsfunktionen müssen so verstanden werden, daß ihr Nenner einen kleinen negativen Imaginärteil hat. Für die Berechnung des Wirkungsquerschnitts muß man den doppelten Wert von M^{III} einsetzen, damit beim Grenzübergang $\eta_A \rightarrow 0$, $\eta_E \rightarrow 0$ der Formalismus wieder mit dem BORN-schen übereinstimmt.

Setzen wir

$$I_0 = \int d^3r \frac{e^{-\lambda r}}{r} \exp\{i \mathbf{q} \cdot \mathbf{r}\}$$

$$\cdot {}_1F_1[-i\eta_E, 1; i(|\mathbf{f}_E| r + \mathbf{f}_E \cdot \mathbf{r})] \quad (5)$$

$$\cdot {}_1F_1[-i\eta_A, 1; i(|\mathbf{f}_A| r - \mathbf{f}_A \cdot \mathbf{r})],$$

wobei

$$\mathbf{q} = \mathbf{f}_A - \mathbf{f}_E - \mathbf{f} \quad \text{ist,}$$

so wird,

$$I = \exp\{-\frac{1}{2}\pi(\eta_A + \eta_E)\} |\Gamma(1+i\eta_A)| |\Gamma(1+i\eta_E)|$$

$$\cdot [-\partial I_0 / \partial \lambda]_{\lambda=0}. \quad (6)$$

Das Integral (5) ist von NORDSIECK⁹ ausgerechnet worden zu

$$I_0 = \frac{2\pi}{\alpha} e^{\pi\eta_A} \left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^{-i\eta_A} \left(\frac{\gamma+\delta}{\gamma}\right)^{i\eta_E}$$

$$\cdot F\left(1+i\eta_A, -i\eta_E, 1; \frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{\alpha(\gamma+\delta)}\right), \quad (7)$$

wobei $\alpha = \frac{1}{2}(q^2 + \lambda^2)$,
 $\beta = \mathbf{f}_E \cdot \mathbf{q} - i\lambda |\mathbf{f}_E|$,
 $\gamma = \mathbf{f}_A \cdot \mathbf{q} + i\lambda |\mathbf{f}_A| - \alpha$,
 $\delta = |\mathbf{f}_A| |\mathbf{f}_E| + \mathbf{f}_A \cdot \mathbf{f}_E - \beta$ ist.

Man kann (7) weiter transformieren:

$$I_0 = \frac{2\pi}{\alpha} e^{\pi\eta_A} \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^{i\eta_A} \left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha}\right)^{i\eta_E}$$

$$\cdot F\left(-i\eta_A, -i\eta_E, 1; \frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma(\alpha+\beta)}\right). \quad (8)$$

Die Matrixelemente (1), (2) und (3) sind groß, wenn $|\mathbf{f}|$ die Größenordnung der Impulse des erzeugten Paars hat, und klein, wenn $|\mathbf{f}|$ die Größenordnung des Impulses des einfallenden Teilchens hat. Für eine Protonenenergie von 4 MeV ist letzterer etwa 100-mal größer als die Impulse der Paarteilchen. In (6) kann man deshalb den Impuls des Photons gegenüber \mathbf{f}_A und \mathbf{f}_E vernachlässigen. Aus (6) und (8) erhält man:

$$I = \exp\{-\frac{1}{2}\pi(\eta_A + \eta_E)\} |\Gamma(1+i\eta_A)| |\Gamma(1+i\eta_E)|$$

$$\cdot \left[\eta_A |\mathbf{f}_A| \frac{\mathbf{f}(-\mathbf{f}_A + \mathbf{f}_E)}{\frac{1}{2}(|\mathbf{f}_A|^2 - |\mathbf{f}_E|^2)^2} F(x_0) - \frac{\frac{1}{2}|\mathbf{f}_A - \mathbf{f}_E|^2 \frac{i}{2}(|\mathbf{f}_A| + |\mathbf{f}_E|)^2 \{|\mathbf{f}_A| \mathbf{f}_E - |\mathbf{f}_E| \mathbf{f}_A\}}{\{ \frac{1}{2}(|\mathbf{f}_A|^2 - |\mathbf{f}_E|^2) \}^4} F'(x_0) \right], \quad (9)$$

wobei $x_0 = \left[\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma(\alpha+\beta)} \right]_{\lambda=0} = -\frac{4\varrho}{(1-\varrho)^2} \sin^2 \frac{\Theta}{2}$ ($\varrho = \eta_A/\eta_E$, Θ Streuwinkel) ist.

Wie von SOMMERFELD¹⁰ gezeigt wird, ist I nur dann groß, wenn \mathbf{f}_A und \mathbf{f}_E antiparallel sind. Deshalb braucht man in dem Skalarprodukt $\mathbf{f} \cdot \mathbf{f}_E$ nur die Komponente von \mathbf{f}_E in der Einfallsrichtung zu berücksichtigen und erhält:

$$I = \exp\{\frac{1}{2}\pi(\eta_A + \eta_E)\} |\Gamma(1+i\eta_A)| |\Gamma(1+i\eta_E)| 16\pi e^{\pi\eta_A} \frac{\mathbf{f} \cdot \mathbf{f}_A}{|\mathbf{f}_A|^3 |\mathbf{f}_E|^2} \frac{\varrho^3}{(1+\varrho)^2 (1-\varrho)^4}$$

$$\cdot \frac{1}{1-x_0} \left\{ \frac{|\mathbf{f}_A|^2 - |\mathbf{f}_E|^2}{|\mathbf{f}_A - \mathbf{f}_E|^2} \right\}^{i(\eta_A + \eta_E)} [-(\eta_E - \eta_A \cos \Theta) F(x_0) + i(1-x_0)(1-\cos \Theta) F'(x_0)]. \quad (10)$$

Der physikalische Grund dieser Näherung ist der folgende: Bei sehr geringer Geschwindigkeit des einfallenden Teilchens ist eine erhebliche Ausstrahlung nur dann zu erwarten, wenn die Bahn stark gekrümmt ist.

⁹ A. NORDSIECK, Phys. Rev. 93, 785 [1954].

¹⁰ s. Anm. 7, S. 558.

Aus (1) und (10) erhält man

$$M^I = \frac{Z_1 Z_2 e^4}{(2\pi)^8} \frac{m}{V \varepsilon_+ \varepsilon_-} \frac{M_1}{\sqrt{E_A E_E}} \int d^3 \mathbf{f} \bar{u}(p_-) \frac{\tilde{n}}{|\mathbf{f} - \mathbf{p}_- - \mathbf{p}_+|^2} \cdot \frac{i(\tilde{k} - \tilde{p}_+) - m}{(k - p_+)^2 + m^2} \gamma_\mu v(p_+) \frac{1}{|\mathbf{f}|^2 - (\Delta E)^2} \bar{u}(k_E) \gamma^\mu u(k_A) \frac{|\mathbf{f}| \cos \hat{k} \cdot \mathbf{k}_A}{|\mathbf{f}_A|^2 |\mathbf{f}_E|^2} I_1 \quad (11)$$

$$\text{mit } I_1 = \exp\left\{-\frac{1}{2}\pi(\eta_A + \eta_E)\right\} |\Gamma(1+i\eta_A)| |\Gamma(1+i\eta_E)| 16\pi e^{\pi\eta_A} \frac{\varrho^3}{(1+\varrho)^2(1-\varrho)^4} \cdot \frac{1}{1-x_0} \left\{ \frac{|\mathbf{f}_A|^2 - |\mathbf{f}_E|^2}{|\mathbf{f}_A - \mathbf{f}_E|^2} \right\}^{i(\eta_A + \eta_E)} [-(\eta_E - \eta_A \cos \Theta) F(x_0) + i(1-x_0)(1-\cos \Theta) F'(x_0)]. \quad (12)$$

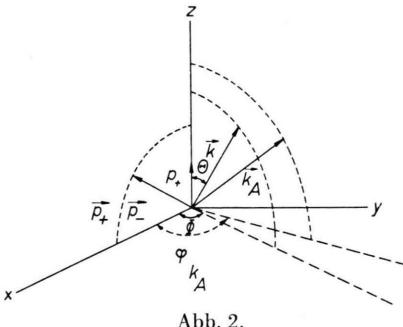


Abb. 2.

Das Integral über f kann man in folgender Weise auswerten. Nehmen wir ein Koordinatensystem, in

dem \mathfrak{p}_+ z-Achse ist, und \mathfrak{p}_- auf der (x, z) -Ebene liegt (s. Abb. 2), so wird

$$\begin{aligned} \cos \hat{k} \hat{k}_A &= \sin \hat{k} \hat{p}_+ \sin \hat{p}_+ \hat{k}_A \cos \Phi \cos \varphi_{kA} \\ &+ \sin \hat{k} \hat{p}_+ \sin \hat{p}_+ \hat{k}_A \sin \Phi \sin \varphi_{kA} \\ &+ \cos \hat{k} \hat{p}_+ \cos \hat{p}_+ \hat{k}_A, \end{aligned}$$

wobei Φ und φ_{KA} jeweils das Azimut von f und von f_A ist. Der Beitrag des zweiten Terms verschwindet. Der Integrand (11) ist nun spiegelsymmetrisch in bezug auf die Ebene, die durch \mathfrak{p}_+ und \mathfrak{p}_- gebildet ist.

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{f}|^3 d|\mathbf{f}| \int_0^{\pi} \sin \Theta d\Theta \int_0^{\pi} d\Phi \frac{1}{|\mathbf{f} - \mathbf{p}_- - \mathbf{p}_+|^2} \frac{i(\tilde{k} - \tilde{p}_+) - m}{(k - p_+)^2 + m^2} \cdot \frac{\sin \hat{k} p_+ \sin \hat{p}_+ k_A \cos \Phi \cos \varphi k_A + \cos \hat{k} p_+ \cos p_+ \hat{k}_A}{|\mathbf{f}|^2 - (\Delta E)^2} . \quad (13)$$

Die Punkte, in denen der Integrand singulär wird, liegen auf den Oberflächen zweier Kugeln. Deren Mittelpunkte liegen im Ursprung und bei \mathfrak{p}_+ ; ihre Radien sind ΔE bzw. $|\mathfrak{p}_-|$. Wie oben begründet wurde, ergibt das zweite Residuum einen Beitrag höherer Ordnung und kann deshalb weggelassen werden. Das erste Residuum gibt

$$J = \pi i (\Delta E)^2 \int_0^\pi \sin \Theta \, d\Theta \int_0^\pi d\Phi \left[\frac{i(\tilde{k} - \tilde{p}_+) - m}{(\tilde{k} - p_+)^2 + m^2} \frac{\sin \hat{k} p_+ \sin \hat{p}_+ k_A \cos \Phi \cos \varphi k_A + \cos \hat{k} p_+ \cos \hat{p}_+ k_A}{|\mathbf{k} - \mathbf{p}_- - \mathbf{p}_+|^2} \right]_{|\mathbf{k}| = \Delta E}. \quad (14)$$

Der Faktor $1/[(k - p_+)^2 + m^2]$ hat eine scharfe Resonanz an der Stelle von $\mathbf{k} \parallel \mathbf{p}_+$. Deshalb kann man die anderen Faktoren, die von den Winkeln weniger stark abhängen, ohne großen Fehler vor das Integralzeichen ziehen.

$$\begin{aligned}
J &= \pi i (\Delta E)^2 \left[\frac{i(\tilde{k} - \tilde{p}_+) - m}{|\mathbf{f}_- - \mathbf{p}_- - \mathbf{p}_+|^2} \left\{ \sin \hat{k} \hat{p}_+ \sin \hat{p}_+ \hat{k}_A \cos \Phi \cos \varphi_{kA} + \cos \hat{k} \hat{p}_+ \cos \hat{p}_+ \hat{k}_A \right\} \right]_{|\mathbf{f}_-| = \Delta E} \\
&\quad \cdot \int_0^\pi \sin \Theta \, d\Theta \int_0^\pi d\Phi \left[\frac{1}{(k - p_+)^2 + m^2} \right]_{|\mathbf{f}_-| = \Delta E} \\
&= \pi i (\Delta E)^2 \frac{i(\tilde{k}_+ - \tilde{p}_+) - m}{|\mathbf{f}_+ - \mathbf{p}_- - \mathbf{p}_+|^2} \cos \hat{p}_+ \hat{k}_A \int_0^\pi \sin \Theta \, d\Theta \int_0^\pi d\Phi \left[\frac{1}{(k - p_+)^2 + m^2} \right]_{|\mathbf{f}_-| = \Delta E}, \tag{15}
\end{aligned}$$

wo bei

$$k_+ = \left(\frac{\Delta E}{|\mathfrak{p}_+|} \mathfrak{p}_+, \Delta E \right) \quad \text{ist}$$

$$J = \frac{\pi^2 i(\Delta E) \cos \hat{p}_+ k_A}{\varepsilon_+ + \beta_+} \log \frac{1 + \beta_+}{1 - \beta_+} \frac{i(\tilde{k}_+ \tilde{p}_+ - m)}{|\mathbf{f}_+ - \mathbf{p}_- - \mathbf{p}_+|^2}. \quad (16)$$

Der relative Fehler, den diese Näherung verursacht, läßt sich in folgender Weise grob abschätzen. Wir ziehen nur $\frac{i(\tilde{k}_+ \tilde{p}_+ - m)}{|\mathbf{f}_+ - \mathbf{p}_- - \mathbf{p}_+|^2}$ als langsam veränderliche Funktion vor das Integralzeichen. Der relative Fehler ist dann:

$$\int_0^\pi \sin \Theta \, d\Theta \int_0^\pi d\Phi \left[\frac{1 - \sin \hat{k}_+ p_+ \sin \hat{p}_+ k_A \cos \Phi \cos \varphi_{kA} - \cos \hat{k}_+ p_+ \cos \hat{p}_+ k_A}{(k - p_+)^2 + m^2} \right]_{|\mathbf{f}| = \Delta E} / \int_0^\pi \sin \Theta \, d\Theta \int_0^\pi d\Phi \left[\frac{1}{(k - p_+)^2 + m^2} \right]_{|\mathbf{f}| = \Delta E}. \quad (17)$$

Wir betrachten die folgenden zwei extremen Fälle:

1° wenn das Positron nach vorne emittiert wird, ergibt (17):

$$2 \beta_+ - (1 - \beta_+) \log \frac{1 + \beta_+}{1 - \beta_+} / \beta_+ \log \frac{1 + \beta_+}{1 - \beta_+},$$

2° wenn die Positronen isotrop emittiert werden, können wir für $\sin \hat{p}_+ k_A$, $\cos \varphi_{kA}$ und $\cos \hat{p}_+ k_A$ ihre quadratischen Mittelwerte einsetzen.

$$\left\{ \left(\beta_+ - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \log \frac{1 + \beta_+}{1 - \beta_+} - (1 - \sqrt{2} \beta_+ - \sqrt{1 - \beta_+^2}) \right\} / \beta_+ \log \frac{1 + \beta_+}{1 - \beta_+}.$$

Für großes β_+ ist der relative Fehler in den beiden Fällen kleiner als 50%. Der Faktor $1/|\mathbf{f} - \mathbf{p}_- - \mathbf{p}_+|^2$ hat auch eine Resonanz an der Stelle von $\mathbf{f} \parallel \mathbf{p}_+ + \mathbf{p}_-$; aber diese Resonanz ist nur scharf, wenn gleichzeitig $\mathbf{p}_+ \parallel \mathbf{p}_-$ ist. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist sehr klein. Deshalb ist der Fehler in dieser Näherung nicht groß.

Aus (16) und (11) erhält man:

$$M^I = \frac{Z_1 Z_2 e^4 i}{2^9 \pi^6} \frac{m}{\sqrt{\varepsilon_+ \varepsilon_-}} \frac{M_1}{\sqrt{E_A E_E}} \frac{1}{\varepsilon_+ \beta_+} \log \frac{1 + \beta_+}{1 - \beta_+} \cdot \frac{\Delta E \cos \hat{k}_+ p_+}{|\mathbf{f}_A|^2 |\mathbf{f}_E|^2} I_1 \bar{u}(p_-) \frac{i(\tilde{k}_+ - \tilde{p}_+ - m) \tilde{n}}{|\mathbf{f}_+ - \mathbf{p}_- - \mathbf{p}_+|^2} \gamma_\mu v(p_+) \bar{u}(k_E) \gamma^\mu u(k_A). \quad (18)$$

Aus (2) bekommt man in derselben Weise:

$$M^{II} = \frac{Z_1 Z_2 e^4 i}{2^9 \pi^6} \frac{m}{\sqrt{\varepsilon_+ \varepsilon_-}} \frac{M_1}{\sqrt{E_A E_E}} \frac{1}{\varepsilon_- \beta_-} \log \frac{1 + \beta_-}{1 - \beta_-} \cdot \frac{\Delta E \cos \hat{k}_- p_-}{|\mathbf{f}_A|^2 |\mathbf{f}_E|^2} I_1 \bar{u}(p_-) \gamma_\mu \frac{i(\tilde{p}_- - \tilde{k}_- - m) \tilde{n}}{|\mathbf{f}_- - \mathbf{p}_- - \mathbf{p}_+|^2} v(p_+) \bar{u}(k_E) \gamma^\mu u(k_A), \quad (19)$$

wobei

$$k_- = \left(\frac{\Delta E}{|\mathbf{p}_-|} \mathbf{p}_-, \Delta E \right) \quad \text{ist.}$$

Die Integrale in (3) können leicht ausgeführt werden.

$$M^{III} = -i \frac{Z_1 e^2}{(2 \pi)^5} \frac{m}{\sqrt{\varepsilon_+ \varepsilon_-}} \frac{M_1}{\sqrt{E_A E_E}} \bar{u}(p_-) \gamma_\mu v(p_+) \frac{1}{|\mathbf{p}_+ + \mathbf{p}_-|^2 - (\Delta E)^2} \bar{u}(k_E) \gamma^\mu u(k_A) I_1 \cdot \frac{|\mathbf{p}_+| \cos \hat{p}_+ k_A + |\mathbf{p}_-| \cos \hat{p}_- k_A}{|\mathbf{f}_A|^2 |\mathbf{f}_E|^2}. \quad (20)$$

In dieser Näherung zeigt eine einfache Betrachtung, daß die Interferenzterme zwischen $M^I + M^{II}$ und M^{III} verschwinden. Der totale Wirkungsquerschnitt zerfällt daher in zwei Anteile.

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2, \quad \sigma_1 = (2 \pi)^2 \frac{4}{\beta_A} \int d^3 p_+ \int d^3 p_- \int d^3 f_E \delta(\varepsilon_+ + \varepsilon_- - \Delta E) \frac{1}{2} S_A S_E |M^I + M^{II}|^2, \quad (21)$$

$$\sigma_2 = (2 \pi)^2 \frac{4}{\beta_A} \int d^3 p_+ \int d^3 p_- \int d^3 f_E \delta(\varepsilon_+ + \varepsilon_- - \Delta E) \frac{1}{2} S_A S_E |M^{III}|^2, \quad (22)$$

wobei S die Summation über Spinzustände bezeichnet. Der Faktor 4 in (22) stammt aus der schon früher erklärten Verdopplung von M^{III} .

Hat das einfallende Teilchen eine sehr niedrige kinetische Energie, so kann man seinen Impuls gegenüber der Ruhmasse vernachlässigen. Aus (18), (19) und (21) erhält man:

$$\begin{aligned} \sigma_1 = & \frac{Z_1^2 Z_2^2 \alpha^2 r_0^2 m^2}{2^8 \pi^6} \frac{1}{\beta_A} \int d^3 p_+ \int d^3 p_- \int d^3 \mathbf{f}_E \delta(\varepsilon_+ + \varepsilon_- - \Delta E) \frac{m^2}{\varepsilon_+ \varepsilon_-} |I_1|^2 \frac{(\Delta E)^2}{|\mathbf{f}_A|^2 |\mathbf{f}_E|^2} (-1) \\ & \cdot \text{Sp} \left[\left\{ \frac{i(p_- - k_-) - \tilde{m}}{|\mathbf{f}_- - \mathbf{p}_- - \mathbf{p}_+|^2} \tilde{n} \frac{\cos k_A p_-}{\beta_- \varepsilon_-} \log \frac{1 + \beta_-}{1 - \beta_-} + \frac{i(-p_+ + k_+) - \tilde{m}}{|\mathbf{f}_+ - \mathbf{p}_- - \mathbf{p}_+|^2} \tilde{n} \frac{\cos k_A p_+}{\beta_+ \varepsilon_+} \log \frac{1 + \beta_+}{1 - \beta_+} \right\} A_+(p_+) \right. \\ & \left. \cdot \left\{ \frac{i(\tilde{p}_- - \tilde{k}_-) - m}{|\mathbf{f}_- - \mathbf{p}_- - \mathbf{p}_+|^2} \tilde{n} \frac{\cos k_A p_-}{\beta_- \varepsilon_-} \log \frac{1 + \beta_-}{1 - \beta_-} + \frac{i(-\tilde{p}_+ + \tilde{k}_+) - m}{|\mathbf{f}_+ - \mathbf{p}_- - \mathbf{p}_+|^2} \tilde{n} \frac{\cos k_A p_+}{\beta_+ \varepsilon_+} \log \frac{1 + \beta_+}{1 - \beta_+} \right\} A_-(p_-) \right], \quad (23) \end{aligned}$$

wobei $A_+(p_+)$ und $A_-(p_-)$ die Projektionsoperatoren für das Positron und für das Elektron sind.

Wir schreiben

$$\begin{aligned} X_1 = & m^4 \int d\Omega_+ \int d\Omega_- \\ & \cdot (-1) \text{Sp} \left[\left\{ \tilde{n} \frac{i(\tilde{p}_- - \tilde{k}_-) - m}{|\mathbf{f}_- - \mathbf{p}_- - \mathbf{p}_+|^2} \tilde{n} \frac{\cos k_A p_-}{\beta_- \varepsilon_-} \log \frac{1 + \beta_-}{1 - \beta_-} + \tilde{n} \frac{i(-\tilde{p}_+ + \tilde{k}_+) - m}{|\mathbf{f}_+ - \mathbf{p}_- - \mathbf{p}_+|^2} \tilde{n} \frac{\cos k_A p_+}{\beta_+ \varepsilon_+} \log \frac{1 + \beta_+}{1 - \beta_+} \right\} A_+(p_+) \right. \\ & \left. \cdot \left\{ \tilde{n} \frac{i(\tilde{p}_- - \tilde{k}_-) - m}{|\mathbf{f}_- - \mathbf{p}_- - \mathbf{p}_+|^2} \tilde{n} \frac{\cos k_A p_-}{\beta_- \varepsilon_-} \log \frac{1 + \beta_-}{1 - \beta_-} + \tilde{n} \frac{i(-\tilde{p}_+ + \tilde{k}_+) - m}{|\mathbf{f}_+ - \mathbf{p}_- - \mathbf{p}_+|^2} \tilde{n} \frac{\cos k_A p_+}{\beta_+ \varepsilon_+} \log \frac{1 + \beta_+}{1 - \beta_+} \right\} A_-(p_-) \right]. \end{aligned}$$

X_1 ist eine dimensionslose Funktion von ε_+/m und ε_-/m . Ferner setzen wir:

$$X_1 = \frac{16 \pi^2}{3} X_1'.$$

Diese Integrale sind elementar aber mühsam zu berechnen. Wir geben nur das Ergebnis.

$$\begin{aligned} X_1' = & \frac{m^2}{\varepsilon_-^2 \beta_-^2} L_-^2 \left[\frac{1}{A_-^2} \{4 \varepsilon_+ \varepsilon_- m^2 + 2 \varepsilon_+^3 \varepsilon_- (1 + \beta_-) + 2 \varepsilon_+ \varepsilon_-^3 (1 - \beta_-)\} \right. \\ & \left. + \frac{1}{B_-} \left\{ \frac{C_-}{A_-^2} - \frac{L_-'}{B_-} \right\} \{2 \varepsilon_+^3 \varepsilon_- \beta_+ (1 + \beta_-) - 2 \varepsilon_+ \varepsilon_-^3 \beta_+ (1 - \beta_-)\} \right] \\ & + \frac{m^2}{\varepsilon_+^2 \beta_+^2} L_+^2 \left[\frac{1}{A_+^2} \{4 \varepsilon_+ \varepsilon_- m^2 + 2 \varepsilon_+ \varepsilon_-^3 (1 + \beta_+) + 2 \varepsilon_+^3 \varepsilon_- (1 - \beta_+)\} \right. \\ & \left. + \frac{1}{B_+} \left\{ \frac{C_+}{A_+^2} - \frac{L_+'}{B_+} \right\} \{2 \varepsilon_+ \varepsilon_-^3 \beta_- (1 + \beta_+) - 2 \varepsilon_+^3 \varepsilon_- \beta_- (1 - \beta_+)\} \right] \\ & - \frac{m^2}{\varepsilon_+ \varepsilon_- \beta_+ \beta_-} L_+ L_- \frac{1}{(\Delta E)^2 \{\varepsilon_+^2 (1 - \beta_+) - \varepsilon_-^2 (1 - \beta_-)\}} \\ & \cdot \left[\{(2 \varepsilon_+^2) (2 \varepsilon_-^2) + m^2 (2 \varepsilon_+^2 + 2 \varepsilon_-^2) - Y\} \left\{ \frac{C_+}{B_+} L_+ - \frac{C_-}{B_-} L_-\right\} \right. \\ & \left. + \{(\varepsilon_+ \beta_+) (\varepsilon_- \beta_-) (2 \varepsilon_+^2 + 2 \varepsilon_-^2) - Y\} \left\{ \frac{C_+}{B_+} \left(1 - \frac{C_+}{B_+}\right) L_+ - \frac{C_-}{B_-} \left(1 - \frac{C_-}{B_-}\right) L_-\right\} \right] \end{aligned} \quad (24)$$

mit

$$\begin{aligned} L_- &= \log \frac{1 + \beta_-}{1 - \beta_-}, & L_+ &= \log \frac{1 + \beta_+}{1 - \beta_+}, \\ L_-' &= \log \frac{\Delta E - \varepsilon_- \beta_- + \varepsilon_+ \beta_+}{\Delta E - \varepsilon_- \beta_- - \varepsilon_+ \beta_+}, & L_+' &= \log \frac{\Delta E - \varepsilon_+ \beta_+ + \varepsilon_- \beta_-}{\Delta E - \varepsilon_- \beta_- - \varepsilon_+ \beta_+}, \\ A_- &= 2 \varepsilon_- \Delta E (1 - \beta_-), & A_+ &= 2 \varepsilon_+ \Delta E (1 - \beta_+), \\ B_- &= 2 \varepsilon_+ \beta_+ (\Delta E - \varepsilon_- \beta_-), & B_+ &= 2 \varepsilon_- \beta_- (\Delta E - \varepsilon_+ \beta_+), \\ C_- &= (\Delta E - \varepsilon_- \beta_-)^2 + \varepsilon_+^2 \beta_+^2, & C_+ &= (\Delta E - \varepsilon_+ \beta_+)^2 + \varepsilon_-^2 \beta_-^2, \end{aligned}$$

$$Y = (\Delta E) \{2 \varepsilon_+^2 (\varepsilon_- \beta_-) + (2 \varepsilon_-^2) (\varepsilon_+ \beta_+)\} + (\Delta E)^2 \{\varepsilon_+ \varepsilon_- (1 - \beta_+ - \beta_- - \beta_+ \beta_-) + m^2\}.$$

Mit dieser Abkürzung ist

$$\sigma_1 = \frac{Z_1^2 Z_2^2 \alpha^2 r_0^2}{3 \cdot 2^4 \pi^4} \frac{1}{\beta_A} \int |\mathbf{p}_+|^2 d|\mathbf{p}_+| \int |\mathbf{p}_-|^2 d|\mathbf{p}_-| \int d^3 \mathbf{f}_E \delta(\varepsilon_+ + \varepsilon_- - \Delta E) \frac{1}{\varepsilon_+ \varepsilon_-} \frac{(\Delta E)^2}{|\mathbf{f}_A|^2 |\mathbf{f}_E|^2} |I_1|^2 X_1' . \quad (25)$$

Aus (20) und (22) erhält man

$$\sigma_2 = \frac{Z_1^2 r_0^2}{2^4 \pi^6} \frac{4}{\beta_A} \int d^3 \mathbf{p}_+ \int d^3 \mathbf{p}_- \int d^3 \mathbf{f}_E \delta(\varepsilon_+ + \varepsilon_- - \Delta E) \frac{m^4}{\varepsilon_+ \varepsilon_-} |I_1|^2 \frac{1}{\{(\Delta E)^2 - |\mathbf{p}_+ + \mathbf{p}_-|^2\}^2} \cdot \frac{\{|\mathbf{p}_+| \cos \hat{\mathbf{p}_+} \mathbf{k}_A + |\mathbf{p}_-| \cos \hat{\mathbf{p}_-} \mathbf{k}_A\}^2}{|\mathbf{f}_A|^4 |\mathbf{f}_E|^4} \text{Sp} [\tilde{\mathbf{n}} \Lambda_+ (\mathbf{p}_+) \tilde{\mathbf{n}} \Lambda_- (\mathbf{p}_-)] . \quad (26)$$

Wir setzen:

$$X_2 = 4 m^2 \int d\Omega_+ \int d\Omega_- \frac{\{|\mathbf{p}_+| \cos \hat{\mathbf{p}_+} \mathbf{k}_A + |\mathbf{p}_-| \cos \hat{\mathbf{p}_-} \mathbf{k}_A\}^2}{\{(\Delta E)^2 - |\mathbf{p}_+ + \mathbf{p}_-|^2\}^2} \text{Sp} [\tilde{\mathbf{n}} \Lambda_+ (\mathbf{p}_+) \tilde{\mathbf{n}} \Lambda_- (\mathbf{p}_-)] = \frac{8 \pi^2}{3} X_2' .$$

X_2 ist eine dimensionslose Funktion und durch (27) gegeben:

$$X_2' = \frac{4(\varepsilon_+ \varepsilon_- + m^2)}{m^2} - \frac{(\Delta E)^2 + 4 \varepsilon_+ \varepsilon_-}{\varepsilon_+ \varepsilon_- \beta_+ \beta_-} L \quad \text{mit} \quad L = \log \frac{(\Delta E + \varepsilon_+ \beta_+ + \varepsilon_- \beta_-)(\Delta E - \varepsilon_- \beta_- + \varepsilon_+ \beta_+)}{(\Delta E - \varepsilon_+ \beta_+ + \varepsilon_- \beta_-)(\Delta E - \varepsilon_- \beta_- - \varepsilon_+ \beta_+)} . \quad (27)$$

Daraus erhält man

$$\sigma_2 = \frac{Z_1^2 r_0^2}{2 \cdot 3 \pi^4} \frac{1}{\beta_A} \int |\mathbf{p}_-|^2 d|\mathbf{p}_-| \int |\mathbf{p}_+|^2 d|\mathbf{p}_+| \int d^3 \mathbf{f}_E \delta(\varepsilon_+ + \varepsilon_- - \Delta E) \frac{m^2}{\varepsilon_+ \varepsilon_-} \frac{1}{|\mathbf{f}_A|^2 |\mathbf{f}_E|^2} |I_1|^2 X_2' . \quad (28)$$

$\int |I_1|^2 d\Omega_{kE}$ wurde für sehr große η_E und η_A von SOMMERFELD¹¹ ausgerechnet zu

$$(2 \pi \eta_A) (2 \pi \eta_E) e^{-2 \pi \xi} \frac{(16 \pi)^2}{3 \sqrt{3}} \frac{\varrho^4}{(1 - \varrho^2)^4} , \quad (29)$$

wobei $\xi = \eta_E - \eta_A$ ist.

In dieser Ableitung muß man beachten, daß das einfallende Teilchen positiv geladen ist¹².

Wir fassen (25), (28) und (29) zusammen. Die endliche Masse M_2 des Streuzentrums läßt sich für die Dipolemission [s. Gl. (9)] dadurch berücksichtigen, daß man Z_1^2 ersetzt durch

$$\left(\frac{Z_1 M_2 - Z_2 M_1}{M_1 + M_2} \right)^2 .$$

$$\sigma = \frac{2 Z_1^2 Z_2^2 \alpha^2}{9 \sqrt{3}} r_0^2 \left(\frac{Z_1 M_2 - Z_2 M_1}{M_1 + M_2} \right)^2 \frac{m}{M_1} \frac{m}{T} \cdot \int_{2m}^T e^{-2 \pi \xi} \frac{d(\Delta E)}{\Delta E} \int_m^{\Delta E - m} \frac{\varepsilon_+}{m} \frac{\varepsilon_-}{m} \beta_+ \beta_- \frac{d\varepsilon_+}{\Delta E} \cdot \left\{ (Z_2 \alpha)^2 X_1' + \frac{8 m^2}{(\Delta E)^2} X_2' \right\} , \quad (30)$$

wobei T die kinetische Energie des einfallenden Teilchens ist.

Numerische Rechnung und Diskussion

Die Größenordnung der Wirkungsquerschnitte für die Paarerzeugung durch geladene Teilchen, die durch (30) gegeben werden, ergibt sich als Produkt

¹¹ s. Anm. 7, S. 560.

aus dem von HEITLER und NORDHEIM¹ abgeleiteten Wert, und dem SOMMERFELDSchen Korrekturfaktor, der aus der Erzeugung der Bremsstrahlung bekannt ist. Für die Paarerzeugung durch geladene schwere Teilchen ist dieser multiplikative Korrekturfaktor sehr klein, weil der kleinstmögliche Energieverlust $2 m c^2$ beträgt und deshalb gegenüber der Primärenergie nicht mehr vernachlässigt werden kann.

Der totale Wirkungsquerschnitt ist für die Paarerzeugung durch Protonen an Tantal ($Z_2 = 73$) und für die Protonenenergie von 8 cm^2 , 12 cm^2 und 16 cm^2 numerisch berechnet. Die Ergebnisse sind in der folgenden Tabelle gegeben.

T (in cm^2)	8	12	16
σ (in cm^2)	$8,4 \cdot 10^{-36}$	$8,8 \cdot 10^{-34}$	$7,3 \cdot 10^{-33}$

Eine Extrapolation der hier gegebenen theoretischen Wirkungsquerschnitte zu den von STAUB und STEPHENS⁵ verwendeten Protonenenergien liefert näherungsweise um einen Faktor 10^6 geringere Werte als der von diesen Autoren experimentell bestimmten oberen Grenze des Wirkungsquerschnitts entspricht. Das negative Ergebnis dieser Versuche ist damit erklärt.

Herrn Professor WÄFFLER danke ich für die Anregung und Förderung dieser Arbeit. Herrn Dr. KÜMMEL danke ich für aufschlußreiche Diskussionen.

¹² s. Anm. 7, S. 564.